

TÍTULO

GUÍA PRÁCTICA - PARTE 2

AUTORES

Ing. María Alicia PIÑEIRO

ASIG

MATEMÁTICA SUPERIOR

COD

K3AP2

DTO

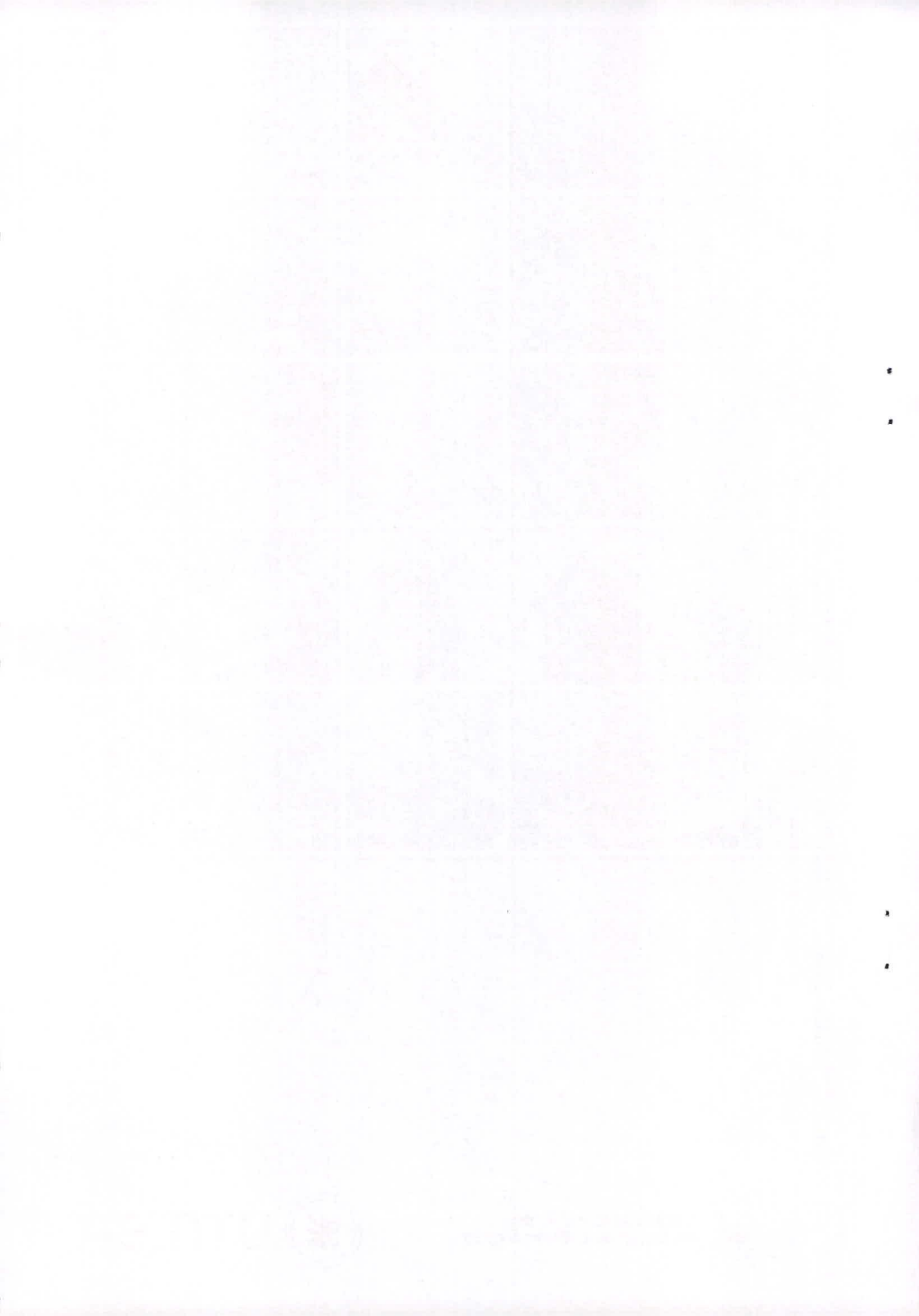
INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN



Centro de Estudiantes
de Ingeniería Tecnológica



UTN.BA



PROLOGO

La presente es la SEGUNDA parte de la GUIA de EJERCICIOS de la asignatura MATEMATICA SUPERIOR (3er nivel de Ingeniería en Sistemas de Información), cuya finalidad es presentar a los alumnos ejercicios típicos de cada tema para que los tomen de referencia y ejerciten su práctica. En esta guía han sido incorporados ejercicios tomados en exámenes, ya sea parciales o finales, es decir que la complejidad de los mismos es similar a la de las instancias de evaluación.

Aquí abarcamos los métodos numéricos que nos permiten resolver problemas que no tienen solución analítica o bien es muy complicada. Estos métodos numéricos se llevan a cabo en computadoras o calculadoras limitadas en la representación numérica por ello también debemos estudiar el comportamiento de los errores cometidos.

- ◆ Teoría de Error.
- ◆ Cálculo numérico de raíces de ecuaciones.
- ◆ Resolución numérica de Sistemas de Ecuaciones Lineales.
- ◆ Interpolación y aproximación numérica.
- ◆ Diferenciación e Integración numérica.
- ◆ Resolución numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Para esta segunda parte de la asignatura recomendamos consultar la siguiente bibliografía:

- ◆ METODOS NUMERICOS CON MATLAB Autor MATHEWS JOHN H. FINK KURTIS D. Editorial PRENTICE-HALL Edición 2000
- ◆ "ANALISIS NUMERICO" , R. L. Burden - J.D. Faires, 3ra edición, 2005, Editorial PARANINFO.
- ◆ ANALISIS NUMERICO Y VISUALIZACION GRAFICA CON MATLAB Autor NAKAMURA Editorial PRENTICE-HALL Edición 1997
- ◆ SOLUCION DE PROBLEMAS DE INGENIERIA CON MATLAB Autor ETTER DOLORES M. Editorial PRENTICE-HALL Edición 1998
- ◆ METODOS NUMERICOS APLICADOS CON SOFTWARE Autor NAKAMURA SHOICHIRO Editorial PRENTICE-HALL Edición 1992
- ◆ METODOS NUMERICOS APLICADOS A LA INGENIERIA Autor AKAI TERENCE J. Editorial LIMUSA Edición 1999
- ◆ MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIEROS Chapra, S., Canale, R., , Mc Graw Hill, 5ta edición, 2007

EJERCITACION

TEORIA DE ERROR

Ejercicio n° 1:

Nombre los distintos tipos de errores numéricos y ejemplifique cada uno de ellos.

Ejercicio n° 2:

Indique justificadamente todos los tipos de errores que se cometen cuando se calcula el volumen de un cilindro circular habiendo medido el diámetro de la base y la altura con un calibre y además realizando las operaciones en una máquina de calcular.

Ejercicio n° 3:

Se quiere obtener una aproximación del valor $\frac{\pi^2}{6}$ mediante la suma: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$

- ¿Qué tipos de errores se cometen?
- ¿A partir de qué valor de n seguro que hay error aritmético?

Ejercicio n° 4:

- Explique a que se denomina error absoluto y error relativo. ¿En que casos se utiliza cada uno de ellos? Ejemplifique.
- ¿Qué es el error de overflow y el de underflow? Ejemplifique.
- Indique los tipos de redondeos (simétrico y truncado) y cual es la conveniencia de cada uno de ellos.

Ejercicio n° 5:

Sea $A = 0.73 \cdot 10^{-2}$; $B = 0.34 \cdot 10^3$ y $C = 0.38 \cdot 10^2$ donde A, B y C no poseen errores propios o inherentes. Sea $Z = (A \cdot B) / C$, calcule:

- el valor exacto de Z
- el valor de Z empleando F(3,10,15,42) con punto flotante normalizado y redondeo simétrico.
- el error absoluto y relativo de Z.

Ejercicio n° 6:

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando detalladamente:

- Sean x_1 y x_2 dos aproximaciones de X , tales que $e(x_1) = 0.2$ y $e(x_2) = 0.1$. Entonces x_2 es mejor aproximación que x_1 .
- Al multiplicar $A = 0.3548 \cdot 10^{-25}$ y $B = 0.3221 \cdot 10^{-14}$ en $F(4,10,30,40)$ se comete error de underflow.
- Solamente se cometen errores de representación, cuando se trata de representar números irracionales o bien racionales con infinitas cifras periódicas.

 Ejercicio n° 7:

Explique la diferencia entre dígitos exactos y dígitos significativos. Ejemplifique.

 Ejercicio n° 8:

Considerando los siguientes valores de p y \bar{p} :

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $p = 10/3$; $\bar{p} = 3.1$ | b) $p = 1/3$; $\bar{p} = 0.333$ |
| c) $p = 3/1000$; $\bar{p} = 0.0031$ | d) $p = 100/3$; $\bar{p} = 33.3$ |

Se pide:

- ¿Cuál es el error absoluto de p ?
- ¿Cuál es el error relativo de p ?
- ¿Cuántos dígitos significativos aproxima \bar{p} a p ?

 Ejercicio n° 9:

Verifique que computacionalmente es posible hallar valores reales de a , b y c para los cuales:

- | | |
|---|-----------------------------------|
| a) $\frac{a-b}{c} \neq \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ | b) $a + (b + c) \neq (a + b) + c$ |
|---|-----------------------------------|

 Ejercicio n° 10:

Una compañía financiera ofrece a los futuros inversores una tasa de interés del 18% mensual. Para efectuar el cálculo final (capital + intereses), la financiera tiene dos alternativas:

Opción I: Se calcula el resultado en una computadora "A" mediante la ecuación: $M = \text{cap} \cdot 1.18$. Esta computadora emplea $F(2,10,20,42)$ con punto flotante normalizado y redondeo truncado.

Opción II: Se calcula en una computadora "B" mediante la fórmula: $M = \text{cap} + \text{cap} \cdot 18 / 100$. Esta computadora emplea $F(3,10,20,42)$ con punto flotante normalizado y redondeo simétrico.

Se desea invertir la suma de U\$S 2150. Indique en qué caso el resultado es favorable el inversor y en qué caso el resultado es favorable a la financiera.

RESPUESTAS T.P. TEORIA DE ERROR

- 1) Teórico. Ver en la guía teórica.
- 2) Se cometen errores de medición(ya sea de instrumento y de observador), errores de representación (para representar π) y errores operativos o aritméticos al efectuar las operaciones. $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
- 3) a) Se cometen errores aritméticos o de operaciones y error de truncamiento de iteración.
b) A partir de $n=3$ ya que $1/9 = 0.111111111....$
- 4) Teórico. Ver en la guía teórica
- 5) a) El valor exacto de $Z = 0.065315789473684210526$ (la parte periódica tiene 18 cifras)
b) El valor aproximado es: $z = 0.653 \cdot 10^{-1}$
c) Los errores son: $e(Z) = 0.000015789473684210526$ y $er(Z) = 0.241798 \cdot 10^{-4}$
- 6) a) Falso b) Verdadero c) Falso
- 7) Teórico. Ver en la guía teórica
- 8) a) Error absoluto: $eP= 0.233333...$ Error relativo: $erP= 0.07$ Dígitos significativos: 1
b) Error absoluto: $eP= 0.000333...$ Error relativo: $erP= 0.001$ Dígitos significativos: 3
c) Error absoluto: $eP= 0.0001$ Error relativo: $erP= 0.003030...$ Dígitos significativos: 2
d) Error absoluto: $eP= 0.033333...$ Error relativo: $erP= 0.0009$ Dígitos significativos: 3
- 9) a) Tomando $a = 8$ $b = 4$ $c = 3$ y trabajando con $t=4$ y redondeo simétrico
b) Tomando $a = 0.93$ $b = 0.24$ $c = 0.15$ y trabajando con $t=2$ y redondeo simétrico
- 10) Computadora "A": 2300 \$ le conviene a la financiera
Computadora "B": 2540 \$ le conviene al inversor

EJERCITACION

CALCULO DE RAICES DE ECUACIONES

Ejercicio n° 1:

Dadas las siguientes funciones, determine gráficamente (sin utilizar calculadora) cuántas raíces reales tienen e indique un intervalo de longitud 1 para cada una de las raíces.

a) $f_1(x) = e^x + x - 4$

b) $f_2(x) = \text{sen}(x) - 2x + 1$

c) $f_3(x) = e^x + x^3 + 1$

d) $f_4(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 2$

e) $f_5(x) = \ln(x) + x - 2$

f) $f_6(x) = 1/x - x^2 + 7x - 6$

g) $f_7(x) = 2e^{-x} - x^2 + 6x - 5$

h) $f_8(x) = x - \cos(2x)$

i) $f_9(x) = x^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 6x + 8$

j) $f_{10}(x) = \ln(x) + x^2 - 8x + 12$

k) $f_{11}(x) = e^{x-1} + x - 3$

l) $f_{12}(x) = \text{sen}(\pi x) - x^2 + 10x - 13$

m) $f_{13}(x) = x^6 + 20x - 25$

n) $f_{14}(x) = \text{sen}(x) - x^2$

ñ) $f_{15}(x) = \ln(x-1) + 1 - 3\text{sen}(\pi x)$

Ejercicio n° 2:

- a) Nombre los criterios de detención de un proceso iterativo de cálculo de raíces de ecuaciones, y la pertinencia de su utilización.
- b) Defina orden y radio de convergencia de un método de cálculo de raíces, y su relación con la velocidad de convergencia.

Ejercicio n° 3:

Explique conceptualmente el Método de Bisección para cálculo de raíces de ecuaciones. Indique cuales son las condiciones necesarias y suficientes para que el método converja a una raíz.

Ejercicio n° 4:

Indique un intervalo para la raíz positiva de $x^2 - 2x - 2 = 0$. Utilice el método de bisección para calcular la raíz con dos decimales exactos. Establezca el número máximo de pasos necesarios para aproximar la raíz con una precisión de 10^{-6} .

Ejercicio n° 5:

Cada una de las siguientes funciones verifica que $sg[f(a)] \neq sg[f(b)]$ en $(a,b) = (0,1)$ ¿Qué punto localiza el algoritmo de bisección? ¿Es una raíz? Justifique.

a) $f(x) = \frac{1}{3x-1}$

b) $f(x) = \cos(10x)$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0.3 \\ -1 & x < 0.3 \end{cases}$

Ejercicio n° 6:

Marque la respuesta correcta y justifique: Para hallar la raíz de una $f(x)$ continua en $(3;5)$ con $sg[f(3)] \neq sg[f(5)]$ con $\varepsilon < 10^{-5}$ por Bisección:

- a) son necesarias 17 iteraciones b) son suficientes 18 iteraciones
c) son necesarias 18 iteraciones d) ninguna de las anteriores es correcta

 Ejercicio n° 7:

Dada $f(x) = 0$ con una raíz en el intervalo $(a, a+1)$. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta:

- a) Si $f(x)$ tiene pendiente grande, entonces el método de bisección converge más rápido.
b) Si se aplica el método de bisección en dicho intervalo, al cabo de 10 iteraciones se tendrá una precisión de 10^{-10} .

 Ejercicio n° 8:

Explique conceptualmente en qué consiste el método de Regula Falsi para el caso particular de una función decreciente y cóncava hacia y^+ .

 Ejercicio n° 9:

Dada $f(x) = x \ln(x) + x$ Indique un intervalo (a,b) e indique qué extremo fijaría para hallar la raíz no nula por el método de Regula Falsi.

 Ejercicio n° 10:

Dada la ecuación: $f(x) = 2e^x - x^2 - 6x - 5 = 0$ ¿Qué intervalo podría tomar para calcular la menor raíz real por Regula Falsi sin necesidad de cambiar de extremo fijo? ¿Cuál sería dicho extremo?

 Ejercicio n° 11:

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta:

- a) Sea $e^x + x^4 - x - 2 = 0$ con raíz en $(0,1) \Rightarrow$ se puede usar Regula Falsi fijando el 1.
b) El método de Bisección siempre converge más lentamente que Regula-Falsi.
c) Dada la función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 25x + 2 - 12e^{-x}$, se puede utilizar el Método de Regula - Falsi en el intervalo $[1,2]$ fijando el 2.
d) Si $f(x)$ es creciente en (a,b) , en el método de Regula-Falsi queda fijo el extremo b

 Ejercicio n° 12:

Dadas las siguientes ecuaciones, proponga un intervalo de longitud 1 que contenga una raíz, e indique una función $g(x)$ que cumpla las condiciones necesarias y suficientes de Método de Punto Fijo. Haga tres iteraciones y diga la precisión obtenida.

- a) $\sin(x) - 2x + 1 = 0$ b) $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$
c) $\sin(x) - x^2 = 0$ d) $2e^{-x} - x^2 + 6x - 5 = 0$

Ejercicio n° 13:

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta:

- a) Si $0 < g'(x) < 1$ en el método de Punto Fijo para calcular raíces de ecuaciones entonces la convergencia es en forma de espiral o alternada.
- b) Sea $e^x + x^4 - x - 2 = 0$ con raíz en $(0,1) \Rightarrow$ se puede usar $g(x) = e^x + x^4 - 2$ para hallar la raíz por el método de punto fijo.
- c) La función $g(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$ puede utilizarse para hallar una raíz con el método de punto fijo.

Ejercicio n° 14:

La ecuación $x^3 - e^x + 3 = 0$ tiene 2 raíces. Una próxima a $-1,4$ y la otra cerca de $4,6$. Usando el método del punto fijo con $g(x) = \ln(x^3 + 3)$ el método converge a :

- a) La raíz cercana a $4,6$ b) La raíz cercana a $-1,4$ c) A ninguna de las dos raíces
- d) No es una $g(x)$ adecuada ya que contiene una función logarítmica

Ejercicio n° 15:

Dada la ecuación $f(x)=0$ con $f(x) = e^x - \frac{x}{x-1}$. Indique con cual o cuales de las siguientes $g(x)$ converge el método del punto fijo.

- a) $g_1(x) = e^x(x-1)$ b) $g_2(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ c) $g_3(x) = \frac{x}{e^x} + 1$ d) $g_4(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Ejercicio n° 16:

Explique conceptualmente en qué consiste el método de Newton Raphson.

Ejercicio n° 17:

Dada la siguiente ecuación: $x^5 - 2x^3 - \ln(x) = 0$ utilice el método de Newton Raphson con $x_0=1$ e itere hasta que se puedan asegurar 5 decimales. ¿Qué ocurre si parte de $x_0=1.1$? Explique.

Ejercicio n° 18:

Dada la ecuación: $(x-3)^{-1} - x^2 + 4x + 1 = 0$ utilice el método de Newton -Raphson hasta encontrar la mayor raíz con $\varepsilon < 10^{-8}$. Transcriba los valores de las aproximaciones x_i .

Ejercicio n° 19:

- a) Explique conceptualmente la variante de Von Mises al método de Newton Raphson.
- b) ¿Cuáles son las ventajas y desventajas?
- c) ¿En qué casos sería más conveniente?

Ejercicio n° 20:

Marque la respuesta correcta y justifique: Dada la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$ con única raíz real en $x=0$, el método de Newton-Raphson converge a ella:

- a) siempre b) sólo tomando $x_0 < 0$ c) sólo tomando $x_0 < 1$ d) sólo tomando $x_0 \in (-1,1)$

 Ejercicio n° 21:

La ecuación $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ tiene una raíz en $x = -\sqrt{2}$. El método de Newton-Raphson se acerca a dicha raíz con una precisión de 10^{-9} luego de 20 iteraciones. La causa de que la convergencia sea tan lenta se debe a que:

- a) $f''(x)$ cambia de signo en las proximidades de $x = -\sqrt{2}$
 b) Se consideró un x_0 tal que $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$
 c) $x = -\sqrt{2}$ es una raíz con orden de multiplicidad mayor a 1
 d) Ninguna de las causas anteriores es correcta

 Ejercicio n° 22:

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta:

- a) Dada $f(x) = 0$ con raíz $p \in (a,b)$, si $\exists x \in (a,b)$ tal que $f'(x) = 0$ entonces el método de Newton - Raphson no converge a la raíz p .
 b) Si $|f'(x)| < 1 \Rightarrow$ el criterio de paro más conveniente es $|f(x_n)| < \varepsilon$

 Ejercicio n° 23:

Dada la ecuación: $\sin(4x) + 3x + 3 = 0$, indique cual de las afirmaciones es correcta:

- a) tiene por lo menos una raíz en el intervalo $[-1 ; 0]$
 b) Se puede aplicar Regula Falsi en $[-2 ; -0.5]$ fijando el extremo $b = -0.5$
 c) tiene una sola raíz real
 d) El método de punto fijo converge con la función $g(x) = \sin(4x) + 4x + 3$
 e) ninguna es correcta

 Ejercicio n° 24:

- a) Encuentre gráficamente un intervalo para la mayor raíz positiva de $x^2 - 6x + e^{x-1} = 0$.
 b) Halle dicha raíz con 3 cifras significativas. Justifique la elección del método y el criterio de paro.

 Ejercicio n° 25:

La suma de dos números es 20. Si a cada número se le añade su raíz cuadrada, el producto de las dos sumas es igual a 155.55. Determine los dos números con exactitud de 10^{-4} .

Ejercicio n° 26:

Aplique el método de Newton-Raphson a $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$ con $x_0 = 1.9$. ¿Es posible dar una explicación al comportamiento extraño de los valores iterados sucesivos?

Ejercicio n° 27:

La ecuación $x^5 - 8x^4 + 17x^3 - 8x^2 - 14x + 20 = 0$ tiene una raíz en $(-2,1)$. Sin embargo, si se aplica el método de Newton-Raphson con $x_0 = -0.3$, llegamos a otra raíz en 5. ¿Por qué?

Ejercicio n° 28:

Dada la ecuación: $x^4 - 7x^3 + 12x^2 + 4x - 16 = 0$ cuyas raíces son enteras: -1, 2 y 4, aplique el método de Newton-Raphson, tomando diferentes valores iniciales x_0 y vea a qué raíz converge en cada caso. Tome los siguientes valores iniciales, previamente piense en forma intuitiva a qué raíz le parece que converge.

- | | | |
|--------------|---------------|-------------------------------------|
| • $x_0 = 5$ | • $x_0 = 3$ | • $x_0 = 3.35$ Ooops!!! ¿Qué pasó? |
| • $x_0 = -2$ | • $x_0 = 3.5$ | • $x_0 = 0.035$ |
| • $x_0 = 1$ | • $x_0 = 3.3$ | • $x_0 = 0.0359$ } Y acá también!!! |
| • $x_0 = 0$ | • $x_0 = 3.4$ | • $x_0 = 0.036$ |

Grafique la función, y explique por qué ocurren esas "anomalías". Trate de encontrar otras anomalías de ese tipo.

Ejercicio n° 29:

Demuestre que al aplicar Newton-Raphson a la función $y = x^2 - a$ con a positivo se llega a la fórmula: $x_{n+1} = 1/2 (x_n + a/x_n)$ que permite calcular el valor de raíz de a sin emplear radicación.

Ejercicio n° 30:

Calcule la raíz cuadrada de 3 con un error menor que 10^{-8} , utilizando los siguientes métodos:

- Bisección
- Punto fijo
- Regula-Falsi
- Newton-Raphson

Seleccione un criterio de paro adecuado. Compare la rapidez de convergencia de todos los métodos (indique cuántas iteraciones fueron necesarias en cada uno).

RESPUESTAS T.P. CALCULO DE RAICES DE ECUACIONES

- 1) a) Tiene 1 raíz real en el intervalo (1 ; 2)
 b) Tiene 1 raíz real en el intervalo (0 ; 1)
 c) Tiene 1 raíz real en el intervalo (-2 ; -1)
 d) Tiene 3 raíces reales en los intervalos (-2 ; -1), (0 ; 1) y (4 ; 5)
 e) Tiene 1 raíz real en el intervalo (1 ; 2)
 f) Tiene 3 raíces reales en los intervalos (0 ; 1), (0.5 ; 1.5) y (6 ; 7)
 g) Tiene 3 raíces reales en los intervalos (-3 ; -2), (0 ; 1) y (5 ; 6)
 h) Tiene 1 raíz real en el intervalo (0 ; 1)
 i) Tiene 2 raíces reales en los intervalos (2 ; 3) y (4 ; 5)
 j) Tiene 3 raíces reales en los intervalos (0 ; 1), (2 ; 3) y (5 ; 6)
 k) Tiene 1 raíz real en el intervalo (1 ; 2)
 l) Tiene 2 raíces reales en los intervalos (1 ; 2) y (8 ; 9)
 m) Tiene 2 raíces reales en los intervalos (-3 ; -2), y (1 ; 2)
 n) Tiene 2 raíces reales , una en el origen y la otra en el intervalo (0 ; 1)
 ñ) Tiene en total 7 raíces reales, una en el intervalo (1 ; 2), dos en el intervalo (2 ; 3), dos en el intervalo (4 ; 5) y otras dos en el intervalo (6 ; 7)
- 2) Teórico
- 3) Teórico
- 4) La raíz $\alpha \in (2,3)$ En el octavo paso podemos asegurar 2.73. Para lograr una precisión de 6 decimales tomando $n=20$ alcanza.
- 5) a) No es continua. Bisección converge a la asíntota vertical.
 b) Tiene tres raíces en el intervalo. Bisección converge a una de ellas.
 c) No es continua. Bisección converge al punto de discontinuidad.
- 6) La respuesta correcta es la B.
- 7) a) FALSO.
 b) FALSO.
- 8) Teórico
- 9) La raíz pertenece a (0.2 ; 0.4) En este intervalo se puede aplicar Regula Falsi fijando $b = 0.4$, la raíz es: 0.36806641
- 10) La menor raíz pertenece a (-6 ; -5). Se puede aplicar Regula Falsi fijando $a = -6$
- 11) a) VERDADERO b) FALSO
 c) VERDADERO d) FALSO
- 12) a) Raíz en (0 ; 1) . $g(x) = \frac{\text{sen}(x) + 1}{2}$
 $x_0 = 1$, $x_1 = 0.9207355$, $x_2 = 0.8980235$, $x_3 = 0.8910484$ con $\varepsilon < 0.01$

b) Raíces en $(0; 1)$ y $(2; 3)$. Con $g(x) = \frac{x^2 + 2 - e^x}{3}$ sólo se llega a la menor.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.3333333, \quad x_2 = 0.238, \quad x_3 = 0.2625 \quad \text{con } \varepsilon < 0.1$$

c) Raíces en 0 y en $(0; 1)$. Con $g(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ llegamos a la mayor:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 0.84147098, \quad x_2 = 0.88609608, \quad x_3 = 0.87418133 \quad \text{con } \varepsilon < 0.1$$

d) Raíces en $(-3; -2)$, $(0; 1)$ y $(5; 6)$. Con $g(x) = \frac{2e^{-x} + 6x - 5}{x}$ sólo se llega a la

mayor: $x_0 = 5, \quad x_1 = 5.00269518, \quad x_2 = 5.00322522, \quad x_3 = 5.0033294$ con $\varepsilon < 0.001$

13) a) FALSO

b) FALSO

c) VERDADERO

14) La respuesta correcta es la A.

15) Para que el método de Punto Fija converja, debe cumplirse $|g'(x)| < 1$ en $[a, b]$.

$g_1'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x x$ en $[1, 2]$ es mayor que 1 \Rightarrow no converge.

$g_2'(x) = \frac{x-1}{x} \left(\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} \right) \Rightarrow g_2'(x) = \frac{-x+1}{x(x-1)^2} \Rightarrow g_2'(1.1) = 2.3978 > 1 \Rightarrow$ no converge

$g_3'(x) = \frac{e^x - x e^x}{e^{2x}} \Rightarrow g_3'(x) = \frac{1-x}{e^x} < 1 \quad \forall x \in [1, 2] \Rightarrow$ converge.

Verificación:

$$x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = 1.36787 \Rightarrow x_2 = 1.34832 \Rightarrow x_3 = 1.35012 \Rightarrow x_4 = 1.34996 \Rightarrow x_5 = 1.34997$$

$g_4(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ es la fórmula de Newton - Raphson, por lo tanto converge.

16) Teórico.

17) $x_0 = 1, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 0.64883, \quad x_3 = 0.64923$ con $\varepsilon < 10^{-5}$

18) La mayor raíz está en $(4; 5)$ Tomando $x_0 = 4, \quad x_1 = 4.4, \quad x_2 = 4.39139123750961,$
 $x_3 = 4.39138238064021, \quad x_4 = 4.3913823806309$ con $\varepsilon < 10^{-8}$

19) Teórico.

20) La respuesta correcta es la C.

21) La respuesta correcta es la C.

22) a) FALSO

b) FALSO

23) La respuesta correcta es la C.

24) a) La mayor raíz positiva está en $(3; 4)$

b) Por N-R: $x_0 = 3$, $x_1 = 3.21801754$, $x_2 = 3.1934332$, $x_3 = 3.19307409$

25) Los números son: 6.512851715 y 13.48714828

26) Por Newton Raphson, partiendo de $x_0=1.9$ se va al -15.22608 y luego va volviendo hasta converger en -2 . Ello se debe a que la primera recta tangente (en 1.9) tenía una pendiente muy suave por estar cerca de un mínimo relativo en $x=1.868517$.

27) Ocurre ello pues la recta tangente en $x=-0.3$ tiene pendiente muy suave, ya que está cerca de un máximo relativo en -0.36 .

28) Partiendo de $x_0 = 5$ converge a $\alpha = 4$

Partiendo de $x_0 = -2$ converge a $\alpha = -1$

Partiendo de $x_0 = 1$ converge a $\alpha = 2$

Partiendo de $x_0 = 0$ converge a $\alpha = 4$ y lo hace en 1 solo paso.

Partiendo de $x_0 = 3$ converge a $\alpha = 2$

Partiendo de $x_0 = 3.5$ converge a $\alpha = 4$

Partiendo de $x_0 = 3.3$ converge a $\alpha = 2$

Partiendo de $x_0 = 3.4$ converge a $\alpha = 4$

Partiendo de $x_0 = 3.35$ converge a $\alpha = -1$ pues está cerca de un mínimo relativo.

Partiendo de $x_0 = 0.035$ converge a $\alpha = -1$ pues está cerca de un mínimo relativo.

Partiendo de $x_0 = 0.0359$ converge a $\alpha = 4$ pues está cerca de un mínimo relativo.

Partiendo de $x_0 = 0.036$ converge a $\alpha = 2$ pues está cerca de un mínimo relativo.

29) Se escribe la fórmula iterativa de Newton Raphson y se simplifica un poco.

30) La función a utilizar puede ser: $f(x) = x^2 - 3 = 0$ $\alpha \in (1,2)$

Por Bisección converge en 23 iteraciones.

Por Newton Raphson converge en 4 iteraciones.

Por Regula Falsi se necesitan 7 iteraciones.

Por Punto fijo con $g_1(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{x} \right)$ partiendo de $x_0=2$ converge en 4 iteraciones.

También para Punto Fijo: $g_2(x) = \frac{x+3}{x+1}$ partiendo de $x_0=2$ converge en 13 iteraciones

Y esta $g_3(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x^2}$ partiendo de $x_0=2$ converge en 10 iteraciones

Hay muchas mas, ¿te animas a encontrar otra?

EJERCITACION

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ejercicio n° 1:

Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Analice si cada una de ellas es:

- a) Simétrica
- b) Singular
- c) Dominante diagonalmente (especifique si lo es en sentido estricto)

Ejercicio n° 2:

Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Calcule:

- a) Los autovalores
- b) El radio espectral
- c) Las normas $\|A\|_2$ y $\|B\|_2$

Ejercicio n° 3:

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \\ 7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ Halle las normas $\|A\|_1$ y $\|A\|_\infty$

Ejercicio n° 4:

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2k-3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 10-k \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3k-3 & 4 & -1 \\ 2 & 5+k^2 & -2 \\ 7 & 4 & 10-k \end{pmatrix}$

- a) Indique los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que sean diagonalmente dominantes.
- b) ¿Para que valores de $k \in \mathbb{R}$, son estrictamente diagonal dominantes?

METODOS ITERATIVOS:Ejercicio n° 5:

Aplique el método iterativo de Jacobi para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$$

realizando los cálculos con tres decimales redondeados e iterando hasta que cumpla que:

$$\|x_i^{(r+1)} - x_i^{(r)}\|_{\infty} < 0,03$$

Ejercicio n° 6:

Resuelva el sistema anterior usando el método de Gauss Seidel. Halle las T_J y T_{GS}

Ejercicio n° 7:

Sea el S.E.L.:
$$\begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

- Indique si los métodos iterativos convergen. Justifique.
- Realice cinco iteraciones por el método de Gauss-Seidel con $F(4, 10, 34, 56)$ y redondeo simétrico partiendo de $X^0 = (0 ; 0)$.
- Idem b) pero partiendo de $X^0 = (9 , 5)$. Compare.

Ejercicio n° 8:

Sea el sistema de ecuaciones lineales: $A \cdot X = B$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \end{pmatrix}$

- ¿Los métodos iterativos convergen? Justifique.
- Resuelva por el método de Jacobi partiendo de $X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y haciendo seis iteraciones.
- Resuelva por el método de Gauss-Seidel partiendo de $X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y haciendo seis iteraciones.
- Compare la velocidad de convergencia de ambos, sabiendo que la solución exacta es: $(3 , 2)$

Ejercicio n° 9:

Aplique el método iterativo de Gauss Seidel para encontrar una solución aproximada de los siguientes sistemas, iterando hasta que cumpla con $\|x_i^{(r+1)} - x_i^{(r)}\|_\infty < 0,1 \cdot 10^{-2}$

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} -x_2 + 6x_3 = -40 \\ 8x_1 - 5x_3 = 16 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ 3x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_3 = 5 \\ 5x_4 = 2,5 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = -3 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 = 9 \end{cases} \end{array}$$

Ejercicio n° 10:

Aplique el método de Jacobi para resolver el sistema: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ comenzando con la aproximación inicial $(1,01;1,01)$. Halle la T_J

Ejercicio n° 11:

Aplique el método de Jacobi para resolver los siguientes sistemas, iterando hasta que cumpla con $\|x_i^{(r+1)} - x_i^{(r)}\|_\infty < 0,01$ y trabajando con 3 decimales a redondeo simétrico

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8 \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9 \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 21 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 30 \end{cases} \end{array}$$

Ejercicio n° 12:

Sea el sistema $A \cdot X = B$ con $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 13 & 20 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 29 \\ 79 \end{pmatrix}$

- Indique si la matriz es diagonal dominante. ¿Puede asegurarse que sea posible resolverlo por el método de Gauss Seidel?
- Realice 100 iteraciones por Gauss Seidel partiendo de $X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. ¿Converge a la solución que es $(3;2)$?
- Analice si el resultado anterior contradice o no al teorema.

RESPUESTAS T.P. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1) a) La única simétrica es la C.

b) Ninguna es singular pues $\det(A) = 5 \neq 0$ $\det(B) = -139 \neq 0$ y $\det(C) = 6 \neq 0$

c) A y B son Estrictamente dominantes diagonalmente.

2) a) Autovalores de A: $\lambda_1=1$ $\lambda_2 = 3$; Autovalores de B: $\lambda_1=1$ $\lambda_2 = 3$ $\lambda_3 = -5$

b) Radio espectral de A: 3 Radio espectral de B: 5

c) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} = \sqrt{9} = 3$ $\|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^t B)} = \sqrt{25} = 5$

3) $\|A\|_1 = 16$ y $\|A\|_\infty = 17$

4) a) Para que A sea diagonal dominante, k debe ser pertenecer a $(-\infty ; -1] \cup \{4\} \cup [16 ; +\infty)$.

Para que B sea diagonal dominante, k debe ser pertenecer a $(-\infty ; -1] \cup [21 ; +\infty)$.

b) Para que A sea estrictamente diagonal dominante, k debe pertenecer a $(-\infty ; -1) \cup (16 ; +\infty)$.

Para que B sea estrictamente diagonal dominante, k debe pertenecer a $(-\infty ; -1) \cup (21 ; +\infty)$.

5) Por Jacobi

X	Y	Z
0	0	0
1,14285714	0,5	-0,5
1,5	0,80357143	0,3452381
1,06037415	1,14880952	0,63392857
0,94472789	1,05612245	0,39838435
1,06608358	0,95386905	0,305839
1,10435901	0,97624109	0,36970056
1,07106269	1,00655977	0,39894619
1,05868215	1,00138506	0,38180176

6) Por Gauss-Seidel

X	Y	Z
0	0	0
1,14285714	0,92857143	0,41666667
1,03741497	0,99319728	0,35714286
1,08066084	0,99453353	0,38619615
1,06424985	0,99564273	0,37544035

$$T_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 1/7 & -4/7 \\ 3/8 & 0 & 1/4 \\ 2/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{GS} = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 1/7 & -4/7 \\ 0 & 3/56 & 1/28 \\ 0 & 35/336 & -3/8 \end{pmatrix}$$

7) a) Sí, convergen pues la matriz es diagonalmente dominante

b) Al resolverlo por el método de Gauss-Seidel partiendo de $X^0 = (0;0)$ se obtiene:

$$X^1 = (0.25, 0.5833) \quad X^2 = (0.3958, 0.5347) \quad X^3 = (0.3837, 0.5388)$$

$$X^4 = (0.3847, 0.5384) \quad X^5 = (0.3846, 0.5385)$$

c) Al resolverlo por el método de Gauss-Seidel partiendo de $X^0 = (9, 5)$ se obtiene:

$$X^1 = (1.5, 0.1667) \quad X^2 = (0.2917, 0.5694) \quad X^3 = (0.3924, 0.5359)$$

$$X^4 = (0.3840, 0.5387) \quad X^5 = (0.3847, 0.5384)$$

Vemos que igualmente converge, solamente una iteración más.

8) a) Sí, convergen pues la matriz es diagonalmente dominante

b) Al resolverlo por el método de Jacobi partiendo de $X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ se obtiene:

$$X^1 = (2, 3) \quad X^2 = (2.5, 2.5) \quad X^3 = (2.75, 2.25)$$

$$X^4 = (2.875, 2.125) \quad X^5 = (2.9375, 2.0625) \quad X^6 = (2.96875, 2.03125)$$

c) Al resolverlo por el método de Gauss-Seidel partiendo de $X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ se obtiene:

$$X^1 = (2, 2.5) \quad X^2 = (2.75, 2.125) \quad X^3 = (2.9375, 2.03125)$$

$$X^4 = (2.984375, 2.0078125) \quad X^5 = (2.99609375, 2.001953125)$$

$$X^6 = (2.999023438, 2.000488281)$$

d) Se puede apreciar la mayor velocidad de convergencia de Gauss-Seidel.

10) Primero se intercambian las filas para que sea convergente.

X_1	X_2
1,01	1,01
0,99666667	0,995
1,00166667	1,00166667
0,99944444	0,99916667
1,00027778	1,00027778
0,99990741	0,99986111
1,0000463	1,0000463
0,99998457	0,99997685
1,00000772	1,00000772

X_1	X_2
0,99999743	0,99999614
1,00000129	1,00000129
0,99999957	0,99999936
1,00000021	1,00000021
0,99999993	0,99999989
1,00000004	1,00000004
0,99999999	0,99999998
1,00000001	1,00000001
1	1

$$T_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

12) a) La matriz no es diagonal dominante, con lo cual no podemos asegurar que G-S converja.

b) Realizando 100 iteraciones se ve que converge a la solución exacta que es (3;2)

c) No contradice el teorema pues es solo condición suficiente.

EJERCITACION INTERPOLACION Y APROXIMACION

A) INTERPOLACION:

Ejercicio n° 1:

a) Dada la siguiente tabla, halle el valor de y para los valores de $x=3$ y $x=7$ aplicando la fórmula de Lagrange:

i	0	1	2
x_i	1	2	4
y_i	1	8	64

b) Suponiendo que la función original fuese $y = x^3$, halle el error relativo de cada estimación.

Ejercicio n° 2:

Halle el polinomio interpolante de la función dada por la siguiente tabla:

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
y_i	-18	-2	6	10

Ejercicio n° 3:

Sean los siguientes puntos: $(0,0)$, $(1/6, 1/2)$ y $(1/2, 1)$

- a) Verifique que dichos puntos pertenecen a la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$
- b) Halle el polinomio interpolante de Lagrange.
- c) Calcule $\text{sen}(\pi/3)$ mediante el polinomio hallado en b)
- d) Estime el error que se comete en c).

Ejercicio n° 4:

Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. ¿Qué relación debe cumplirse entre α, β, γ y δ para que exista un polinomio real $p(x)$ de grado no mayor a 2 tal que $p(-1) = \alpha$, $p(1) = \beta$, $p(3) = \gamma$ y $p(0) = \delta$?

Ejercicio n° 5:

Dada la siguiente tabla:

$$\text{Log } 1 = 0.000 \quad \text{Log } 2 = 0.301 \quad \text{Log } 3 = 0.477 \quad \text{Log } 4 = 0.602 \quad \text{Log } 5 = 0.699$$

- a) Construya la tabla de diferencias finitas.
- b) Calcule $\text{Log } 1.7$ utilizando un polinomio interpolante con la fórmula de Newton. Justifique porqué elige el progresivo o el regresivo.



Ejercicio n° 6:

Si existe algún polinomio de grado 3 que interpola los siguientes datos, hállelo.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0	5	4	3	8	25



Ejercicio n° 7:

En la siguiente tabla se listan los valores de $f(x) = \sqrt{x}$ redondeados hasta 5 decimales.

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
y_i	1.0000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

- Calcule las diferencias hasta orden sexto.
- Interpole las raíces de 1.01 y 1.28 usando las fórmulas de Newton.
- Aplique la fórmula de Lagrange para obtener la raíz cuadrada de 1.12
- Teniendo en cuenta que $\sqrt{x} = 1.05$, utilice los datos de la tabla para encontrar x.
- Interpolar el valor $\sqrt{1.32}$.



Ejercicio n° 8:

Calcule mediante la fórmula de Newton-Gregory regresiva el polinomio interpolante que pase por los puntos (-1,1), (0,1), (1,1) y (2,-5). Interpole en $x=1.5$ y $x=2.5$



Ejercicio n° 9:

Aplique la fórmula de Lagrange para hallar una aproximación de $y(1.5)$ empleando algunos valores de la tabla:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
y_i	0.2420	0.1942	0.1497	0.1109	0.0790	0.0540

Compare con el resultado correcto que es 0.1295



Ejercicio n° 10:

Dada la siguiente función tabulada, halle el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos:

x	1	3	5	6	8
y	1.2	2.4	10	19.2	54.4



Ejercicio n° 11:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	1	3	4	5	7
$f(x_i)$	1	3	13	37	151

- Halle el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos
- Con el polinomio hallado, calcule $f(6)$ y responda: ¿De qué grado es el polinomio de menor grado que pasa por todos los puntos de la tabla y además por el punto $(6; 80)$?



Ejercicio n° 12:

Halle $k \in \mathbb{R}$ para que exista un polinomio de grado 2 que pase por todos los puntos de la siguiente tabla, y halle dicho polinomio en forma normalizada:

x_i	-1	0	2	3	5
$f(x_i)$	10	3	1	k	28



Ejercicio n° 13:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	0	1	4	5	7	8
$f(x_i)$	4	3	0	k	123	220

- Halle, si es posible, el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que por todos los puntos dados pase un polinomio de grado 3.
- Con el valor de k hallado en a), indique cuántos polinomios de grado 4 pasan por los puntos dados, y cuántos de grado 10 pasan por ellos. Justifique.



Ejercicio n° 14:

Indique si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas justificando:

- El polinomio de menor grado que pasa por los puntos A $(1 ; 3.5)$, B $(1.5 ; 5.75)$, C $(2 ; 9)$, y D $(2.5 ; 13.25)$ es de grado 3.
- No existe polinomio de grado 4 que pase por los siguientes puntos: $(-1 ; 2)$, $(-0.5 ; 2.3)$, $(0 ; 3.4)$, $(0.5 ; 4.5)$ y $(1 ; 5)$
- Si se dispone de una tabla con 6 valores x_i y sus imágenes f_i , entonces existe hasta la diferencia finita progresiva de orden 6 de f_0 .
- El polinomio que pasa por los puntos $(-1,-1)$, $(0,3)$, $(1,0)$ y $(2,-7)$ tiene coeficiente lineal nulo.
- Dada una tabla de n pares de valores (x_i,y_i) , es posible encontrar más de un polinomio de grado n que interpolen todos los datos.
- Dado un conjunto de n puntos (x_i,y_i) , existe una única función interpolante tal que $f(x_i)=y_i$ $\forall i:1\dots n$
- El polinomio de menor grado que pasa por los puntos $(1 ; 3.5)$, $(1.5 ; 5)$, $(2 ; 6.5)$, $(2.5 ; k)$ no puede ser de grado 2.

Ejercicio n° 15:

¿Qué relación debe haber entre a, b y c para que el polinomio interpolante de los puntos (-1,a), (0,b), (1,0) y (2,c) tenga coeficiente lineal nulo?

Ejercicio n° 16:

Dado un conjunto de puntos $\{(x_i, y_i)\}$ entonces se verifica que (puede haber más de una correcta)

- a) $\nabla y_k = \Delta y_{k-1}$ b) $\nabla y_{k-1} = \Delta y_k$ c) $\nabla^2 y_k = \Delta^2 y_{k-2}$ d) $\Delta^2 y_k = \nabla^2 y_{k-2}$

Ejercicio n° 17:

Indique los valores de a y b tal que el polinomio interpolante de los 5 puntos sea de grado 4, pero que por los 4 primeros puntos pase un polinomio de grado 2.

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	0	7	24	a	b

a = (¿Es único? SI NO) b = (¿Es único? SI NO)

Ejercicio n° 18:

El polinomio interpolante de menor grado que pasa por (1,5) (2,7) (x,y) es:

- a) siempre una parábola de 2^{do} grado b) siempre una recta
 c) siempre una cúbica d) depende de (x,y)

Ejercicio n° 19:

El polinomio que interpola a los puntos (0; 3), (0.5; 5), (1; 7) y (k ; 5k) es:

- a) de grado 3, $\forall k \in \mathbb{R}$ b) nunca es de grado 3
 c) $\exists k$ tal que sea de grado 1 d) $\exists k$ tal que sea de grado 2

Ejercicio n° 20:

Dado el siguiente conjunto de puntos, cuales de las afirmaciones son correctas:

x	1	1.5	2	2.5	3
y	1.3	b	2.2	a	3

- a) Existen infinitos valores de a y b tal que el conjunto de puntos pertenezca a un $P_3(x)$
 b) Existe un único valor de a y b tal que el conjunto de puntos pertenezca a un $P_3(x)$
 c) Existen infinitos valores de a y b tal que el conjunto de puntos pertenezca a un $P_2(x)$
 d) Existen un único valor de a y b tal que el conjunto de puntos pertenezca a un $P_2(x)$

Ejercicio n° 21:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x_i)$	20	20	k	15	12	10	10

- a) Halle, si es posible, el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos sea de grado 3. Justifique.
- b) Para los demás valores de k , ¿de qué grado es el polinomio?

B) MINIMOS CUADRADOS - DISCRETO:

Ejercicio n° 22:

Dados los siguientes datos, halle una aproximación lineal por mínimos cuadrados. Estime el error.

x_i	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	1	6	8	12	18

Ejercicio n° 23:

Ajuste una recta de Mínimos cuadrados a los datos:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	3	5	6	8	9	11
y_i	2	3	4	6	5	8

- a) Siendo x la variable independiente
- b) Siendo y la variable independiente

Ejercicio n° 24:

Dada la tabla:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	10.0	10.1	10.2	10.3	10.4	10.5
y_i	1	1.20	1.25	1.267	1.268	1.276

- a) Halle la recta de ajuste de mínimos cuadrados
- b) Idem a) pero con redondeo simétrico y trabajando con 4 dígitos.
- c) Compare resultados.

Ejercicio n° 25:

a) Halle una parábola de regresión de Mínimos Cuadrados que ajuste los siguientes datos:

Año	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
Población en EE.UU (en millones)	23.2	31.4	39.8	50.2	62.9	76.0	92.0	105.7	122.8	131.7	151.1

Sugerencia: conviene localizar el origen en 1900, de modo tal que 1850 es -5, 1860 es -4, etc. para que los cálculos sean más sencillos.

b) Calcule la población estimada para el año 1960.

Ejercicio n° 26:

Encuentre los polinomios de mínimos cuadrados de grados 1, 2 y 3 para los siguientes datos:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.15	0.31	0.5	0.6	0.75
y_i	1.0	1.004	1.031	1.117	1.223	4.422

¿Cuál es la mejor aproximación?

Ejercicio n° 27:

Aproxime los valores de la tabla a una función potencial de la forma $y = a x^b$ (trabaje con redondeo simétrico y 3 decimales)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.5	1.7	3.4	5.7	8.4

Ejercicio n° 28:

Aproxime a una curva de tipo exponencial $y = a e^{bx}$ los siguientes datos:

x_i	1	2	3	4
y_i	7	11	17	27

Ejercicio n° 29:

Dada la tabla, ajuste por mínimos cuadrados:

x_i	1	2	3	4
y_i	10	5	2	1

- a) a una recta.
- b) a un modelo exponencial.
- c) a la expresión aproximante: $y = a + b \frac{1}{x}$
- d) a una parábola de mínimos cuadrados.
- e) ¿Cuál es la expresión que mejor ajusta dichos datos?

Ejercicio n° 30:

Dada la siguiente tabla:

x_i	1	2	2.5	4	6	8	8.5
y_i	0.4	0.7	0.8	1.0	1.2	1.3	1.4

- a) Aproxime mediante el modelo $y = \frac{ax}{b+x}$ (promedio de crecimiento de saturación).
- b) Aproxime mediante el modelo potencial.
- c) Aproxime mediante una parábola por el método de mínimos cuadrados.

Ejercicio n° 31:

Dada la siguiente tabla:

x	0,1	0,7	1,2	2,4	2,9	3,5	4,1	4,4	5	5,8	6,2	6,6
y	3,354	3,563	3,862	4,523	4,952	5,433	6,21	6,534	7,567	9,265	10,986	12,851

- a) Ajuste los datos a una recta de mínimos cuadrados.
- b) Ajuste los datos a una parábola de mínimos cuadrados.
- c) Ajuste los datos a una exponencial $y = a e^{bx}$ por mínimos cuadrados.
- d) Ajuste los datos a una hipérbola $y = a / (b+x)$ por mínimos cuadrados.
- e) Indique cuál es la mejor aproximación.

C) MINIMOS CUADRADOS - CONTINUO:

Ejercicio n° 32:

Dadas las siguientes funciones continuas, aproxime por un polinomio de Mínimos cuadrados en los intervalos indicados y grafique. Por lo menos resuelva 4 ítems utilizando los POLINOMIOS DE LEGENDRE:

- a) $f(x) = e^x$ en $[1,2]$ por una recta.
- b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ definida en $[0,1]$, aproxime por una función lineal.
- c) $f(x) = x^4$ en $[-0.5,0.5]$ por una recta y por una parábola.
- d) $f(x) = e^x$ en $[0,2]$ por una recta y por una parábola.
- e) $f(x) = x^2 e^x$ en $[-1;1]$ por una recta.
- f) $f(x) = (2x)^3$ en $[0,1]$ por una recta y por una parábola.
- g) $f(x) = x^3 - 3x$ en $[0,1]$ por una recta.
- h) $f(x) = e^x$ en $[0,1]$ por una recta y por una parábola.

Ejercicio n° 33:

Analice la validez de las siguientes afirmaciones, justificando:

- Si f es una función continua en $[a,b]$ y $p_n(x)$ es el polinomio de mínimos cuadrados de grado n , siempre es posible hallar un polinomio de grado $n+1$ que ajuste mejor a f que $p_n(x)$ en $[a,b]$
- Es posible hallar una función no lineal tal que exista un polinomio de grado 1 que la aproxime mejor que cualquier polinomio de grado 2.

D) COMBINADOS

Ejercicio n° 34:

Explique las diferencias entre aproximar una función por mínimos cuadrados e interpolar la función. Indique en qué casos se requiere cada una de ellas.

Ejercicio n° 35:

Se hicieron 10 mediciones de la altura de un objeto en caída libre en 10 instantes distintos. Para saber la altura en un determinado instante del intervalo, lo más adecuado sería:

- a) hallar un polinomio interpolante con los 10 puntos
- b) aproximar por una parábola de regresión
- c) aproximar por una recta de regresión
- d) ninguna de las anteriores

[Recordar: $h = h_0 + v_0 t + 0.5 g t^2$]

Ejercicio n° 36:

Un químico ha tomado mediciones de Presión y (volumen)⁻¹ de un gas a temperatura constante T , y con estos valores desea estimar el número de moles n : (Ley de los gases: $P V = n R T$, con R constante conocida)

presión	28	35	37	40	45	50	56	59	62	68	74	78	82
vol ⁻¹	2.1	2.5	2.7	2.8	3	3.6	3.8	4.2	4.4	5	5.3	5.6	5.9

¿Qué es lo más adecuado que puede hacer?

- a) Hallar un polinomio interpolante de todos los datos.
- b) Tomar 2 datos y hallar una recta interpolante.
- c) Ajustar los datos a una Recta de Mínimos Cuadrados.
- d) Ajustar los datos a una Parábola de Mínimos Cuadrados.

Ejercicio n° 37:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x_i)$	1,184	1,056	0,973	0,909	0,856	0,812	0,769

- a) Indique de qué grado es el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos.
- b) Sólo con las $x \in Z$, obtenga una aproximación exponencial $y = k e^{-mx}$ por mínimos cuadrados.
- c) Sólo con las $x \in Z$, obtenga una aproximación de la forma: $y = \frac{ax}{b+x}$ por mínimos cuadrados.
- d) Indique cuál de las dos aproxima mejor. Justifique.

Ejercicio n° 38:

- a) Calcule $f(1.2)$ con algún método de interpolación y usando la **menor** cantidad de puntos.

x	1	1.7	2	3	3.5
y	2.6	3.85	3	3.7	4

- b) Siendo $f_1(x) = 0,45x + 2,4189$ y $f_2(x) = 2,74x^{0,30}$ dos funciones de ajuste de los datos anteriores (parte a). ¿Cuál de las dos funciones ajusta mejor a los datos?

Ejercicio n° 39:

Dada la siguiente tabla de datos:

x	1	2	3	4	5
$y=f(x)$	21	38	62	104	175

- a) Indique de qué grados (todos los que haya) es IMPOSIBLE hallar polinomios que interpolen todos los datos dados. Justifique bien detalladamente.
- b) Ajuste los datos a la función: $y = a e^{bx}$ por mínimos cuadrados y estime el error.

Ejercicio n° 40:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	-3	-1	1	3	5	7	9
$f(x_i)$	39	19	-21	-57	-65	-21	99

- a) El polinomio de menor grado que interpola todos los puntos es de grado Justifique.
- b) Sólo tomando los primeros 5 puntos, obtenga una aproximación lineal por mínimos cuadrados. Grafique.

RESPUESTAS T.P. INTERPOLACION Y APROXIMACION

A) INTERPOLACION:

- 1) $p(x) = 7x^2 - 14x + 8$ $p(3) = 29$, $er(3) = 7.4\%$ $p(7) = 253$, $er(7) = 26\%$
- 2) $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$
- 3) $p(x) = -3x^2 + 3.5x$ $p(1/3) = 5/6 = 0.8333333...$ $f(1/3) = 0.8660254$ $e = 0.032692$
- 4) $8\delta - 3\alpha - 6\beta + \gamma = 0$
- 5) $p(x) = -0.002125x^4 + 0.03358333...x^3 - 0.210875x^2 + 0.730416666...x - 0.551$
 $p(1.7) = 0.228526287497$ $\log(1.7) = 0.230448921378$
- 6) $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$
- 7) a) *Tabla de diferencias finitas:*

1,00000						
	0,02470					
1,02470		-0,00059				
	0,02411		0,00005			
1,04881		-0,00054		-0,00002		
	0,02357		0,00003		0,00003	
1,07238		-0,00051		0,00001		-0,00006
	0,02306		0,00004		-0,00003	
1,09544		-0,00047		-0,00002		
	0,02259		0,00002			
1,11803		-0,00045				
	0,02214					
1,14017						

- b) $p(1.01) = 1.00499$ $p(1.28) = 1.13137$
- c) $p(1.12) = 1.05830$
- d) $x = 1.10121$
- e) $p(1.32) = 1.14889$
- 8) $p(x) = -x^3 + x + 1$ $p(1.5) = -0.875$ $p(2.5) = -12.125$
- 9) *Empleando sólo dos valores de la tabla:* $p(1.5) = 0.1303$
- 10) *Calculamos las diferencias divididas:*

1	1,2	0,6	0,8	0,2	0
3	2,4	3,8	1,8	0,2	
5	10	9,2	2,8		
6	19,2	17,6			
8	54,4				

$$P(x) = 1.2 + 0.6(x-1) + 0.8(x-1)(x-3) + 0.2(x-1)(x-3)(x-5) = 0.2x^3 - x^2 + 2x$$

11) a) La tabla de diferencia finitas es:

1	1				
3	3	1			
4	13	10	3		
5	37	24	7	1	
7	151	57	11	1	0

Por lo tanto el polinomio interpolante es:

$$p(x) = 1 + 1(x-1) + 3(x-1)(x-3) + 1(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$p(x) = 1 + x - 1 + 3(x^2 - 4x + 3) + x^3 - 4x^2 + 3x - 4x^2 + 16x - 12$$

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 3$$

b) $p(6) = 6^3 - 5 \cdot 6^2 + 8 \cdot 6 - 3 = 81$

Por lo tanto el polinomio de menor grado que pasa por todos los puntos de la tabla y además por el punto (6; 80) es de grado 5, ya que no existe ninguno de grado menor o igual a 4 que pase por todos ellos.

12) a) $k=6$

		orden 1	orden 2	orden 3
-1	10			
0	3	-7		
2	1	-1	2	
3	k	k-1	k/3	(k-6)/12
5	28	(28-k)/2	(10-k)/2	(30-5k)/30

b) $p(x) = 10 - 7(x+1) + 2(x+1)x = 10 - 7x - 7 + 2x^2 + 2x = 2x^2 - 5x + 3$

13) a) $K=19$ b) De grado 4: cero De grado 10: infinitos

14) a) FALSO. El polinomio de menor grado que pasa por los puntos dados es de grado 2, ya que la diferencia finita de orden 3 es nula.

b) FALSO. Sí, existe polinomio de grado 4, ya que la diferencia finita de orden 4 no es nula.

c) FALSO. Si se dispone de una tabla con 6 valores x_i y sus imágenes f_i , entonces existe hasta la diferencia finita progresiva de orden 5 de f_0 .

d) VERDADERO. El polinomio que pasa por los puntos dados es $p(x) = 0.5x^3 - 3.5x^2 + 3$, o sea tiene coeficiente lineal nulo.

e) VERDADERO. Dada una tabla de n pares de valores (x_i, y_i) , es posible encontrar más de un polinomio de grado n que interpolen todos los datos.

f) FALSO. Dado un conjunto de n puntos (x_i, y_i) , existen infinitas funciones interpolantes.

g) VERDADERO. Si $k = 8$, el polinomio de menor grado que pasa por los puntos dados es de grado 1. Pero si k es distinto de 8, el polinomio es de grado 3. Nunca es de grado 2

15) La relación que deben cumplir es: $2a + 3b + c = 0$

16) Las respuestas correctas son la A y la C

$$\begin{array}{ll} a) \nabla Y_k = Y_k - Y_{k-1} & \Delta Y_{k-1} = Y_k - Y_{k-1} \text{ son iguales} \\ b) \nabla Y_{k-1} = Y_{k-1} - Y_{k-2} & \Delta Y_k = Y_{k+1} - Y_k \text{ son distintas} \\ c) \nabla^2 Y_k = Y_k - 2Y_{k-1} + Y_{k-2} & \Delta^2 Y_{k-2} = Y_k - 2Y_{k-1} + Y_{k-2} \text{ son iguales} \\ d) \Delta^2 Y_k = Y_{k+2} - 2Y_{k+1} + Y_k & \nabla^2 Y_{k-2} = Y_{k-2} - 2Y_{k-3} + Y_{k-4} \text{ son distintas} \end{array}$$

17) $a = 51$ (único) $b \neq 88$ (no es único, hay infinitos)

18) La respuesta correcta es la D.

19) La respuesta correcta es la C. (De hecho, si $k = 3$, el polinomio interpolante es de grado 1)

20) Las respuestas correctas son la A y la D.

21) a) Si $k = 18$, $p(x)$ es de grado 3. b) $\forall k \neq 18$, $p(x)$ es de grado 6.

B) MINIMOS CUADRADOS - DISCRETO:

22) $y = 4x - 7$ Error: $\sum d_i^2 = 4$

23) a) $p(x) = 5/7x - 1/3$ b) $p(x) = 7/9x - 7/9$

24) $p(x) = 0.4574x - 3.47847$

25) $p(x) = 0.3974x^2 + 13x + 76.64$ Para 1960: $p(6) = 168.9464$

26) Grado 1: $p(x) = 3,2536x + 0,38016$ Grado 2: $p(x) = 6.618x^2 - 1.143x + 1.235$

Grado 3: $p(x) = 41.84x^3 - 33.69x^2 + 6.267x + 0.917$ Error: 0.2989

27) $y = 0.501 \cdot x^{1.752}$

28) $y = 4.46799 \cdot e^{0.4485x}$

29) a) $p(x) = -3x + 12$ Error: 4 b) $y = 22.36 e^{-0.7824x}$ Error: 0.1722

c) $p(x) = 11.938 \cdot 1/x - 1.7179$ d) $p(x) = x^2 - 8x + 17$ Error: 0

30) $p(x) = 2.045x / (4.053 + x)$ Error: $\sum d_i^2 = 0.005$

31) a) Recta: $y = 1,30544472x + 1,9247018$ Error: $\sum d_i^2 = 13,872094$

b) Parábola: $y = 0,2631757x^2 - 0,47125227x + 3,77674697$ Error: $\sum d_i^2 = 1,64153286$

c) Exponencial: $y = 2,95364919 e^{0,1990715x}$ Error: $\sum d_i^2 = 5,44838946$

d) Hipérbola: $y = \frac{-29.5298}{x - 8.90967}$ Error: $\sum d_i^2 = 0,07530064$

C) MINIMOS CUADRADOS - CONTINUO:

32) a) $p(x) = 4.59473x - 2.22133$

b) $p(x) = 0.07379x + 0.4866999$

c) recta: $p(x) = 1/80$; parábola: $p(x) = 3/14x^2 - 3/560$

d) recta: $p(x) = 3x + 0.194528$

e) $p(x) = 2.4515x - 0.50749$

f) recta: $p(x) = 7.2x - 1.6$; parábola: $p(x) = 12x^2 - 4.8x + 0.4$

g) $p(x) = -2.1x - 0.2$

h) recta: $p(x) = 1.69031x - 0.873127$

33) a) FALSO (Si $f(t) = \cos(\pi t)$ en $[-0.5, 0.5]$ una constante es mejor que una lineal)b) VERDADERO (Por ejemplo: $f(x) = x^3$ en $[-1, 1]$)

D) COMBINADOS:

34) Teórico.

35) La respuesta correcta es la B, ya que en teoría la relación entre las variables es cuadrática.

36) La respuesta correcta es la C, ya que en teoría la relación entre las variables es lineal.

37) a) Es de grado 5 b) $y = 1.3318e^{-0.142x}$ Error: $\sum d_i^2 = 0.00208$ c) $y = 0.728x / (x - 0.403)$ Error: $\sum d_i^2 = 0.00688$ c) Es mejor la exponencial38) a) Utilizando solo 2 puntos: $p(x) = 1.7857x + 0.81428 \Rightarrow p(1.2) = 2.9571$ b) Aproxima mejor f_2 .

39) a) No existen polinomios de grados 0, 1, 2 y 4 que pasen por los puntos dados.

b) $y = 12.8e^{0.5247x}$ Error: $\sum d_i^2 = 4.8569$

40) a) El polinomio de menor grado es de grado 3.

b) $p(x) = -14.2x - 2.8$

EJERCITACION

DIFERENCIACION E INTEGRACION NUMERICA

A) CALCULO NUMERICO DE DERIVADAS

Ejercicio n° 1:

Dada la siguiente tabla de datos:

i	0	1	2
x_i	0,349	0,436	0,523
$y_i=f(x_i)$	0,34202	0,42262	0,5

a) Estime la primer derivada de la función $f(x)$ en $x=0,436$ utilizando las diferencias progresivas, regresivas y centrales.

b) Estime la segunda derivada en $x=0,436$

Ejercicio n° 2:

Aproxime $f'(150)$ y $f''(180)$ para la función $f(x)$ dada en la tabla

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	60	120	180	240	300
$f(x_i)$	0	0,0824	0,2747	0,6502	1,3851	3,2229

Ejercicio n° 3:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x_i)$	20	20	18	15	12	10	10

Halle numéricamente un valor aproximado de la derivada segunda en $x=6$ utilizando alguna fórmula conveniente.

Ejercicio n° 4:

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando sus respuestas:

- No es posible calcular una aproximación de $f'(x_i)$ si no se conoce el valor de $f(x_i)$
- Si se dispone de una tabla con valores f_0, f_1, \dots, f_n ($n \geq 4$), entonces se puede calcular aproximadamente la derivada segunda de f_2 usando diferencias progresivas.

B) CALCULO NUMERICO DE INTEGRALES

Ejercicio n° 5:

Explique en qué casos se debe recurrir a la integración numérica y en qué consiste el método de los trapecios.

Ejercicio n° 6:

Dada la función $f(x) = 1+x^3$ en $[0,2]$ calcule la integral:

- a) en forma analítica
- b) aproximando mediante Trapecios con $h=1, h=0.5, h=0.2$
- c) aproximando mediante Simpson con $h=1$
- d) calcule los errores y extraiga conclusiones

Ejercicio n° 7:

Estime $\int_1^{1.4} f(x)dx$ de la función f dada por la tabla:

i	0	1	2	3	4
x_i	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
y_i	0.010	0.252	0.586	1.024	1.578

- a) Por el método de Trapecios
- b) Por el método de Simpson

Ejercicio n° 8:

Halle $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

- a) por el método de los Trapecios con $h=0.5$
- b) por el método de los Simpson con $h=0.5$
- c) estime los errores absolutos y relativos.

Ejercicio n° 9:

Halle el volumen del siguiente cuerpo (en revolución) $V = \int_a^b f(x)^2 dx$ siendo $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$

- a) Usando Trapecios con $h=1$
- b) Usando Simpson con $h=1$

Ejercicio n° 10:

Calcule el área de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ y compruebe que su valor es 10π .

Ejercicio n° 11:

Aplique la regla de Simpson para encontrar el área dentro del primer cuadrante de la curva:

$$f(x)=(x+5)(x-1)(9-x)$$

Ejercicio n° 12:

Para ciertos trabajos sobre recursos hidráulicos se requieren canales con un cierto área transversal. A falta de otros medios para el cálculo de tales áreas, se toman medidas de la profundidad a lo largo de la sección transversal. La tabla que sigue muestra la longitud transversal y su correspondiente profundidad. Utilizando las reglas del trapecio y Simpson, calcule dicha área transversal, sabiendo que las medidas están expresadas en metros.

longitud	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
profundidad	0,0	1,8	2,0	4,0	4,0	6,0	4,0	3,4	3,6	2,8	0,0

Ejercicio n° 13:

Dada la siguiente tabla de datos:

x	1	2	3	4	5
y=f(x)	21	38	62	104	175

Halle un valor aproximado de $\int_1^5 f(x)dx$ usando si es posible el método de Simpson, sino el de Trapecios e indique si se puede estimar el error cometido en este caso.

Ejercicio n° 14:

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones y justifique:

- Sea $f(x)$ una función positiva y cóncava hacia abajo en $[a,b]$, sea A el valor de la integral calculada por el método de los trapecios $\Rightarrow A < \int_a^b f(x)dx$
- Si al calcular $\int_a^b f(x) dx$ por trapecios se obtiene el valor exacto $\Rightarrow f''(x) = 0$ en todo $x \in (a,b)$
- Si al calcular $\int_a^b f(x) dx$ por Simpson se obtiene error cero $\Rightarrow f(x)$ es polinómica de grado ≤ 3 .
- El error en la integración por Simpson de $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10$ en $(0; p)$ depende exclusivamente del valor de p .
- $\forall a \in \mathbb{Z}$: es posible resolver la integral de unan función $f(x)$ en el intervalo $(a; 16a)$ por el método de Simpson con $h = 0.15$

f) La integral de la función $f(x) = e^{|x|} \cdot \text{sen}(x)$ entre $-a$ y a (con $a \in \mathbb{R}^+$) calculada por el método de Trapecios con una cantidad par de subintervalos da siempre exacta.

g) Existe $h \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{-1}^1 \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} dx$ calculada por Trapecios dé mayor que la exacta.

h) No es posible calcular $\int_0^2 x^2 e^x dx$ por el método de Simpson con $h=0.4$



Ejercicio n° 15:

a) Determine el número de subintervalos que deben tomarse para aproximar $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ con dos cifras decimales correctas aplicando el método del trapecio.

b) Determine el número de subintervalos que deben tomarse para aproximar $\int_{0,1}^1 \frac{1}{x} dx$ con dos cifras decimales correctas aplicando el método del trapecio.



Ejercicio n° 16:

Halle el mayor valor de $h \in \mathbb{Q}$ y no periódico tal que al calcular las siguientes integrales en los intervalos dados, el error sea menor al ε fijado.

a) $I = \int_1^5 x^2 \ln(x) dx$ por Simpson con $\varepsilon < 10^{-5}$.

b) $I = \int_1^5 x^2 \ln(x) dx$ por Trapecios con $\varepsilon < 10^{-2}$.

c) $I = \int_{-3}^{-1} (e^x + \text{sen}(x)) dx$ por Simpson con $\varepsilon < 10^{-4}$.

d) $I = \int_0^1 (x \text{sen}(x) + \cos(x)) dx$ por Trapecios con $\varepsilon < 10^{-2}$.

e) $I = \int_0^5 (x+1)^5 dx$ por Simpson con $\varepsilon < 10^{-2}$.

f) $I = \int_1^5 x^3 \ln(x) dx$ por Trapecios con $\varepsilon < 10^{-5}$

g) $I = \int_0^1 e^{2x} \cos(x) dx$ por Trapecios con $\varepsilon < 10^{-2}$

h) $I = \int_1^3 \frac{\ln(x)+1}{x} dx$ por Trapecios con $\varepsilon < 10^{-2}$.

Ejercicio n° 17:

Indique si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas justificando:

- Al calcular por Trapecios la integral de $f(x) = \ln(x) x^3$ entre 1 y 2 el valor que se obtiene es mayor que el valor exacto de la integral.
- Para la integral anterior, si se la resuelve por Trapecios con $h=0.1$ el error será menor que 0.0001
- Al calcular por Trapecios $\int_1^4 e^{2x} \cos(x) dx$ con $h=0.1$ se obtiene un valor mayor al exacto.
- Es posible calcular la integral anterior por Simpson con $h = 0.04$

Ejercicio n° 18:

Dé un ejemplo de una función NO LINEAL tal que:

- Al calcular la integral de esa función por Trapecios se obtenga menor error que calculándola por Simpson.
- El valor de la integral en $[a,b]$ calculada por el método de Simpson dé un error de signo contrario al calculado por Trapecios.

Ejercicio n° 19:

Dada $I = \int_{-a}^a f(x) dx$, marque la/s proposición/ones verdadera/s:

- Si f es impar $\wedge h|a \Rightarrow \text{Error(Trapecios)}=0$
- Si $a=15$, es posible resolverla por Simpson con $h=0.6$
- Si $\text{Error(Simpson)} = 0 \Rightarrow f$ es polinómica de grado ≤ 3
- ninguna de las anteriores es correcta

Ejercicio n° 20:

Dada $I = \int_0^2 f(x) dx$, siendo $f(x) = x^2$ si $x \in (0;1)$ $\wedge f(x) = 2x - x^2$ si $x \in (1;2)$ marque la/s

proposición/ones verdadera/s:

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) Trapecios nunca da exacto | b) $\exists h$ tal que $\text{Error(Simpson)} > \text{Error(Trapecios)}$ |
| c) Simpson con $h=1$ da exacto | d) ninguna de las anteriores es correcta |

Ejercicio n° 21:

La mínima cantidad de subintervalos para calcular el valor exacto de la integral $\int_1^2 3x^3 - 2x^2 + 5 dx$ usando el método de Simpson es: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

Ejercicio n° 22:

Si f es una función positiva y creciente en el intervalo $[a,b]$ entonces el valor de $\int_a^b f(x)dx$ por Simpson es:

- a) siempre mayor al exacto
- b) siempre menor al exacto
- c) nunca puede dar exacto
- d) Ninguna de las anteriores

Ejercicio n° 23:

El valor del área comprendida entre las funciones $y = x$, $y = \frac{3}{x-2}$ y el eje x entre 1 y 5 por

Trapecios es:

- a) menor al valor exacto
- b) mayor al valor exacto
- c) igual al valor exacto
- d) ninguna de las anteriores

El área anterior calculada por el método de Simpson con $h=1$ es:..... (completar)

Ejercicio n° 24:

¿Es posible resolver $I = \int_{-0.5}^{0.5} e^{-x^2} dx$ por el Método de Trapecios con $h = 0.04$ y asegurar que el valor aproximado obtenido es menor que el exacto?

Ejercicio n° 25:

Dada $I = \int_1^5 f(x) dx$ indique cuales de las siguientes afirmaciones son correctas:

- c) Si f es polinómica de grado 5 entonces el método de trapecios no puede dar exacto.
- d) No es posible tomar $h=0.8$ para hallar un valor aproximado por el método de Simpson.
- e) Una cota del error de trapecios con $h=1$ es: $\frac{1}{3} f''(5)$

Ejercicio n° 26:

Indique si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas justificando:

- a) La menor cantidad de subintervalos n para que al calcular $\int_1^5 x^3 \ln(x) dx$ por el método de Simpson pueda asegurarse un error $\varepsilon < 10^{-5}$ sin resolver la integral analíticamente, es $n = 24$.
- b) Si se calcula $\int_{1.7}^{4.7} \frac{\ln(x) + 1}{x} dx$ por Trapecios con $h=0.125$ el error es menor que 10^{-4} .

c) Al calcular el valor de $\int_1^5 x \ln(x) dx$ por trapecios el valor aproximado es menor que el verdadero.

d) Para calcular $\int_1^4 x \ln(x) dx$ por Simpson con $\varepsilon < 10^{-6}$ se debe tomar $h = 0.005$

Ejercicio n° 27:

Dada la función $f(x) = x^2 e^x$ Analice (sin resolver la integral) si tomando $h=0.05$ se puede asegurar que el error cometido al calcular la integral de $f(x)$ en $[-2.5 ; -0.5]$ por Trapecios es menor que 0.0001 Justifique detalladamente.

Ejercicio n° 28:

Halle el área determinada por la curva $f(x) = -x^2 + 6x$ y el eje x mediante Trapecios con $h=1$.

Ejercicio n° 29:

Halle el área bajo la curva $y = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$ en $[-1, 1]$ por Trapecios, con $n=10$.

Ejercicio n° 30:

Sea $I = \int_0^k \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2 dx$, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- a) Si $k=4$, al resolverla por Trapecios se obtiene lo mismo que por Simpson con cualquier n par.
b) Si $k=2$, el valor calculado por Trapecios con cualquier h es menor al exacto.

C) EJERCICIOS COMBINADOS

Ejercicio n° 31:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	-3	-1	1	3	5	7	9
$f(x_i)$	39	19	-21	-57	-65	-21	99

- c) Halle numéricamente un valor aproximado de la derivada segunda en $x=5$.
d) Obtenga el valor de la integral de $f(x)$ en $[-3,9]$ utilizando el método de Simpson.



Ejercicio n° 32:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	-3	-1	1	3	5	7
$f(x_i)$	77	47	43	-31	-175	-293

- e) Halle numéricamente un valor aproximado de la derivada primera en $x=4$.
 f) Obtenga el valor de la integral de $f(x)$ en $[-3,7]$ utilizando algún método numérico adecuado.

RESPUESTAS T.P. DIFERENCIACION E INTEGRACION NUMERICA

A) CALCULO NUMERICO DE DERIVADAS

1) a) Con diferencia progresiva: $f'(0.436) \cong 0.889425$

Con diferencia regresiva: $f'(0.436) \cong 0.9264367$

Con diferencia central: $f'(0.436) \cong 0.907931$

b) Solamente se puede con la central: $f''(0.436) \cong -0.425419$

2) $f'(150) \cong 0.006258$ $f''(180) \cong 0.0000998$ (diferencia central)

3) $f''(6) = 0.25$ (diferencia central)

4) a) FALSO, ya que con la fórmula central no se necesita la función en el punto.

b) VERDADERO, ya que sólo se necesitan f_2, f_3 y f_4

B) CALCULO NUMERICO DE INTEGRALES

5) Teórico.

6) a) Exacta: $I = 6$

b) Trapecios con $h=1$: $A = 7$; Trapecios con $h=0.5$: $A = 6.25$; Trapecios con $h=0.2$: $A = 6.04$

c) Simpson con $h=1$: $A = 6$ d) A menor h en Trapecios, menor error. Simpson dio exacta ya que la función era cúbica, la derivada cuarta en cualquier punto vale cero.

7) a) Por Trapecios: $A = 0.2656$ b) Por Simpson: $A = 0.26213333$

8) a) Por Trapecios: $A = 1.68576 / \sqrt{2\pi}$ b) Por Simpson: $A = 1.71217 / \sqrt{2\pi}$

c) Error de Trapecios $\leq \dots$ Error de Simpson $\leq \dots$

9) a) $V \cong 9$ b) $V \cong 12$ Valor exacto: 12

10) Tomando $h=0.1$ y calculando $A = 2 * 0.4 \int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2} dx$ por Simpson se obtiene: 31.4029

que es aproximadamente igual a $10\pi = 31.4159\dots$

11) $I = \int_1^9 f(x)dx = 853.3333$ por Simpson con $h=4$ ya que al ser cúbica da exacto $\forall h$.

12) Por Trapecios: 63.2 Por Simpson: 66.1333

13) Por Simpson (ya que $n=4$): $A = 296$ No se puede estimar el error pues no se conoce $f(x)$

14) a) VERDADERO.

b) FALSO.

c) FALSO.

d) FALSO.

e) VERDADERO.

f) VERDADERO.

g) FALSO.

h) VERDADERO.

15) a) Deben tomarse ... subintervalos.

b) Deben tomarse ... subintervalos.

16) a) $h = 0.1$

b) $h = 0.0625$

c) $h = 0.25$

d) $h = 0.25$

e) $h = 0.125$

f) $h = 0.000625$

g) $h = 0.0625$

h) $h = 0.2$

17) a) VERDADERO ya que $f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$ en $[1,2]$

b) FALSO.

c) FALSO

d) FALSO.

18) a) Por ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 - (x-1)^2 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$ por Trapecios da exacta pero por

Simpson no.

b) Por ejemplo: $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ en $[0,1]$ Trapecios: 0.5 ; Simpson: 0.66666 ; Exacta: 0.6366197

- 19) *Son verdaderas la A y la B.*
- 20) *Sólo es verdadera la B.*
- 21) *La respuesta correcta es la b).*
- 22) *La respuesta correcta es la d).*
- 23) *La respuesta correcta es la b).*
- 24) *Es VERDADERO.*
- 25) a) FALSO
b) VERDADERO.
c) FALSO.
- 26) a) FALSO. *Para asegurar el error, deben tomarse 44 subintervalos.*
b) FALSO.
c) FALSO. *La función es cóncava hacia arriba.*
d) FALSO. *No hace falta tomar h tan pequeño, alcanza con que sea $h < 0.074$.*
- 27) *Tomando $h= 0.05$ NO se puede asegurar que el error sea menor que 0.0001*
- 28) *Con Trapecios y $h=1$: $A = 35$*
- 29) *Por Trapecios con $h=0.2$: $A = 1.17229579$*
- 30) a) VERDADERO. *Ambos dan exacto.*
b) VERDADERO. *Pues f es cóncava hacia abajo.*

C) COMBINADOS

- 31) a) $f''(5) \cong 13$
b) *Por Simpson: $A = -180$*
- 32) a) $f'(4) \cong -72$
b) *Por Trapecios (ya que hay 5 subintervalos): $A = -448$*

EJERCITACION

RESOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ejercicio n° 1:

¿Es posible determinar si el problema de valor inicial $y' = f(x,y)$ con $x \in [a,b] \wedge y(a) = \alpha$ tiene solución única y si está bien planteado?

a) $y' = y \cos(x)$ $x \in [0,1]$ $y(0)=1$

b) $y' = \frac{2}{x} y + e^x x^2$ $x \in [1,2]$ $y(1) = 0$

c) $y' = 1 - y$ $x \in [0,1]$ $y(0)=0$

d) $y' = -x y + \frac{4x}{y}$ $x \in [0,1]$ $y(0)=1$

e) $y' = x^2 y + 1$ $x \in [0,1]$ $y(0)=1$

Ejercicio n° 2:

Marque la opción correcta:

La Ecuación diferencial $y'(t) = -t y$ con $y(0) = 1$ en $R = \{ (t,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq t \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 2 \}$

a) Cumple la condición de Lipschitz con $L = 2$ b) Cumple la condición de Lipschitz con $L = 3$ c) Cumple la condición de Lipschitz con $L = 6$ d) No cumple la condición de Lipschitz en R .Ejercicio n° 3:

Deduzca la fórmula del Método de Euler para resolver ecuaciones diferenciales de 1^{er} orden.

Interprete geoméricamente.

Ejercicio n° 4:

Resuelva las siguientes E.D. por medio de Euler, con el tamaño de paso indicado en cada una:

a) $y' = y + 1$ con $y(0) = 0$ $y(0.1) = ?$ con $h = 0.02$

b) $y' = 2(y - 1) / t$ con $y(1) = 2$ $y(1.5) = ?$ con $h = 0.1$

c) $y' - y = 2t - t^2$ con $y(0)=1$ $y(1) = ?$ con $h = 0.2$

Ejercicio n° 5:

De las siguientes afirmaciones sobre métodos de resolución numérica de ED, indique cual de ellas es verdadera:

- En cualquier método, al reducir el h a la mitad, el error global se reduce a la mitad.
- Es preferible utilizar el método de Taylor de orden 2 en vez de Heun.
- Si $y(t)$ es lineal, al resolver $y'(t) = f(t, y)$ por Euler se obtiene resultado exacto, para todo h .
- Ninguna de las anteriores es correcta.

 Ejercicio n° 6:

- Indique las diferencias entre los métodos de paso simple y paso múltiple para el cálculo de E.D. Dé ejemplos de cada uno de ellos.
- ¿Qué ventaja tienen los métodos de Runge-Kutta?
- Explique en qué consiste emplear un método Predictor-Corrector. Nombre algunos.

 Ejercicio n° 7:

Sea el problema de valor inicial: $y' = x / y$ siendo $y(0) = 1$

Calcule $y(0,2)$ por el método de HEUN tomando $h=0,1$

 Ejercicio n° 8:

Dado el problema: $y' (t^2 + t) - y = 0$ con $y(1) = 0.5$

- Halle $y(2)$ con $h=0.1$ mediante Euler.
- Halle $y(2)$ con $h=0.5$ mediante RK 4^{to} orden.
- ¿Cuál es más precisa?

 Ejercicio n° 9:

Dada: $y'(t) = -t y$ con $y(0) = 1$ cuya solución exacta es $y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ indique con cuál de las siguientes opciones se obtiene un resultado más preciso de $y(1)$

- Con Euler tomando $h=0.1$
- Con Heun tomando $h=0.2$
- Con Taylor de orden 2 tomando $h=0.5$
- Con RK de orden 4 tomando $h=1$

Ejercicio n° 10:

Dadas las siguientes afirmaciones referentes a los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales, indique si son verdaderas o falsas justificando:

- Con el método de Euler se puede lograr siempre muy buena precisión.
- Los métodos de Runge-Kutta son de paso simple.
- El método de Euler es un método de paso simple.
- La ventaja de los métodos de Runge Kutta es que obtienen la misma precisión que Taylor de orden superior sin necesidad de calcular derivadas de orden superior.

 Ejercicio n° 11:

Dado el problema de valor inicial: $t y'(t) + y(t) = 0$ con $y(1) = 1$

- Verifique la condición de Lipschitz para $t \in [1,2]$ e indique si el problema tiene solución única.
- Obtenga $y(1.2)$ e $y(1.4)$ por Euler (con $h=0.2$).

OPTATIVO:

- Teniendo en cuenta los valores anteriores, halle $y(1.6)$ mediante Adams-Bashford de 3 pasos.
- Considerando los valores $y(1.2)=0.8333$ $y(1.4)=0.71428$ $y(1.6) = 0.625$, utilice la fórmula de Adams Bashforth - Moulton para hallar $y(1.8)$ e $y(2.0)$ con $h=0.2$

 Ejercicio n° 12:

La fórmula: $w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4}{3} h [2f(t_i; w_i) - f(t_{i-1}; w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}; w_{i-2})]$, corresponde a:

- método de paso simple
- método de 2 pasos
- fórmula explícita
- ninguna de las anteriores

 Ejercicio n° 13:

Dadas las siguientes afirmaciones referentes a los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales, indique si son verdaderas o falsas justificando:

- Una fórmula implícita no puede usarse como etapa predictor.
- La fórmula: $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} [9f(t_{i+1}; w_{i+1}) + 19f(t_i; w_i) - 5f(t_{i-1}; w_{i-1}) + f(t_{i-2}; w_{i-2})]$ corresponde a un método de paso múltiple. (Si es así, indique de cuántos pasos).
- La fórmula anterior solamente puede usarse como etapa correctora.

Ejercicio n° 14:

Sea el problema: $\begin{cases} x'(t) = 3x - y \\ y'(t) = 4x - y \end{cases}$ con $x(0) = 0.2 \wedge y(0) = 0.5$

- a) Halle $x(0.5)$ e $y(0.5)$ utilizando el método de Euler con $h=0.1$
 b) Sabiendo que la solución exacta es: $x(t) = 0.2 e^t - 0.1 t e^t \wedge y(t) = 0.5 e^t - 0.2 t e^t$
 Calcule el error relativo cometido en cada una.

PROBLEMAS APLICADOS

 Ejercicio n° 15:

La velocidad de emisión de radioactividad de una sustancia es proporcional a la cantidad de sustancia remanente. La ecuación diferencial que describe este fenómeno es:

$$y' = -k y$$

donde el signo menos refleja el hecho de que la radioactividad disminuye con el tiempo.

Supongamos que $k=0.01$ y que hay 100 g. Del material al tiempo $t=0$. ¿Cuánto material queda cuando $t=100$?

- a) Halle la respuesta en forma analítica.
 b) Halle la respuesta numéricamente con Euler ($h=25, h=10, h=5, h=1$)
 c) Halle la respuesta numéricamente con Heun ($h=20, h=10$)
 d) Halle la respuesta numéricamente con Runge-Kutta de 4^{to} orden ($h=100, h=50$)
 e) Halle la respuesta numéricamente con Adams-Moulton ($h=10$) con los valores iniciales exactos.

 Ejercicio n° 16:

Un cuerpo con masa inicial de 200 g. es acelerado por una fuerza constante de 2000 N. La masa disminuye a razón de 1 gramo por segundo. Si el cuerpo está en reposo para $t=0$, determine su velocidad luego de transcurridos 10 segundos, teniendo en cuenta que:

$$dV/dt = 2000 / (200 - t) \quad \text{y aplicando:}$$

- a) Euler con $h=10, h=5, h=2, h=1$
 b) Heun con $h=10, h=5, h=2, h=1$
 c) Algún método predictor corrector con $h=10, h=5, h=2, h=1$
 d) Compare con la solución exacta.

RESPUESTAS ECUACIONES DIFERENCIALES

- 1) Los que están bien planteados y tienen solución única son: a) $L=1$ b) $L=2$ c) $L=1$ e) $L=1$
- 2) La respuesta correcta es la B.
- 3) TEORICO
- 4) a) $y(0.1) \cong 0.1040808$ b) $y(1.5) \cong 3.18181818$ c) $y(1) \cong 3.190656$
- 5) La respuesta correcta es la C.
- 6) TEORICO
- 7) $y(0.2) \cong 1.01982782$
- 8) a) $y(2) \cong 0.67481519$ b) $y(2) \cong 0.65807284$ c) Exacta: 0.6666666666
- 9) La respuesta correcta es la B.
- 10) a) FALSO b) VERDADERO c) VERDADERO d) VERDADERO
- 11) a) $L=1$ b) Euler: $y(1.2) \cong 0.8$ $y(1.4) \cong 0.66666666$ c) $y(1.6) \cong 0.578571428$
d) AB y AM: $y^*(1.8) \cong 0.55769$ $y(1.8) \cong 0.555385$
- 12) La respuesta correcta es la C.
- 13) a) VERDADERO b) VERDADERO (3 pasos) c) VERDADERO
- 14) a) $x(0.5) \cong 0.248897$ $y(0.5) \cong 0.658845$ b) $er(x) = 0.64\%$ $er(y) = 0.10\%$
- 15) a) Exacta: $y(t) = 100 \cdot e^{-0.01t} \Rightarrow y(100) = 36.7879441$
b) Euler con $h=25$: $y(100) = 31.640625$ Con $h=10$: 34.867844 Con $h=5$: 35.8485922
Con $h=1$: $y(100) = 36.6032341$
c) Heun con $h=20$: $y(100) = 37.0739843$ Con $h=10$: $y(100) = 36.8540985$
d) RK 4to con $h=100$: $y(100) = 37.5$ Con $h=50$: $y(100) = 36.81708442$
e) AM con $h=10$: $y(100) =$
- 16) a) Euler con $h=10$: $y(10) \cong 100$ Con $h=5$: $y(10) \cong 101.282051$
Con $h=2$: $y(10) \cong 102.062074$ Con $h=1$: $y(10) \cong 102.323881$
b) Heun con $h=10$: $y(10) \cong 102.631579$ con $h=5$: $y(10) \cong 102.597841$
d) Exacta: $y(10) = 102.58659$